МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.
7 класс. Теория чисел–2. 2 июня 2009.

1. Докажите, что любое натуральное число большее 100 можно представить в виде суммы трех попарно взаимно простых чисел.

2. а) Остатки от деления натурального числа на 110, 111, 112, …, 220 выписали в строчку. Оказалось, что каждое число, начиная со второго, больше предыдущего. Докажите, что в строчке записаны 111 последовательных целых чисел.

б) А верно ли, что если остатки от деления на 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 образуют возрастающую последовательность, то эти остатки – последовательные числа?

3. В равенстве $x^5 + 2x + 6 = p^k$ числа x и k – натуральные, а p – простое. Найдите p.

4. В строчку выписаны 2009 чисел, каждое из которых больше предыдущего на одну и ту же величину. Может ли среди выписанных чисел быть ровно 102 целых?

5. Найдите все натуральные a и b, для которых оба числа $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ – целые.

6. Докажите, что для каждого иррационального числа a существуют такие положительные числа b и b', что $a+b$ и ab' рациональны, а $a+b'$ и ab иррациональны.

7. На доске в строчку выписаны 100 чисел. Докажите, что между ними можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, чтобы полученное выражение делилось на 6^{20}.

8. Докажите, что любого натурального n найдется натуральное k такое, что $19^k - 97 \mathrel{\vdots} 2^n$.